Aufgabe 1

Lagerverwalter Siggi Stapel drückt Ihnen folgende Tabelle in die Hand:

Teil	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Preis	10	80	600	1000	9	920	500	500	5	20
Menge	8500	2000	1500	300	100	45	100	1200	10000	3000

Er bittet Sie, für Ihn folgende Aufgaben zu erledigen:

a) Klassifizieren Sie die Teile anhand einer ABC-Analyse!

b) Stellen Sie das Ergebnis auch grafisch dar!

c) Welche Handlungsanweisungen sind je Gruppe zu beachten?

Aufgabe 2

Durch die Pfeilliste

$$(1,2)\quad(1,3)\quad(1,4)\quad(2,3)\quad(2,6)\quad(3,5)\quad(3,6)\quad(4,5)\quad(6,5)$$

wird ein schlichter Digraph eindeutig beschrieben.

a) Stellen Sie den Digraphen graphisch dar!

b) Bilden Sie die zugehörige Adjazenzmatrix A. Wie können der Eingangsgrad und der Ausgangsgrad der einzelnen Knoten aus der Adjazenzmatrix berechnet werden?

c) Überprüfen Sie den Digraphen auf Zyklenfreiheit und nehmen Sie gegebenenfalls eine topologische Sortierung vor!

d) Bilden Sie den dem Digraphen $\vec{G}$ zugeordneten Graphen $G = Z(\vec{G})$ und diskutieren Sie vorhandene Zusammenhangseigenschaften!

e) Geben Sie, falls möglich, ein Gerüst in G bzw. ein gerichtetes Gerüst in $\vec{G}$ an!

Aufgabe 3

Gegeben sei ein schlichter Digraph $\vec{G}$ durch seine Inzidenzmatrix:

$$H(\vec{G}) = \begin{array}{c|cccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\ \hline 1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{array}$$

a) Zeichnen Sie $\vec{G}$ sowie den zugehörigen Graphen $G = Z(\vec{G})$!

b) Geben Sie die Adjazenzmatrizen $A(G), A(\vec{G})$ an!

c) Geben Sie mit Hilfe von a) – falls möglich – eine offene (geschlossene) Hamiltonsche (Eulersche) Linie in G bzw. $\vec{G}$ an!

d) Bestimmen Sie – falls möglich – ein (gerichtetes) Gerüst in G bzw. $\vec{G}$!

Aufgabe 4

Gegeben sei ein schlichter Digraph $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$ durch die Pfeilliste:

$(1,2)$ $(2,5)$ $(5,1)$ $(3,6)$ $(4,3)$ $(4,6)$

a) Bestimmen Sie für $\vec{G}$ die Adjazenzmatrix und diskutieren Sie Zusammenhangseigenschaften.

b) Zeigen Sie, dass der Teilgraph $\vec{G}' = \left(V', \vec{E}'\right)$ mit $V' = \{1,2,4,5,6\}$ und $\vec{E}' = \{(1,2),(2,5),(4,6)\}$ einen gerichteten Wald darstellt.

c) Lösen Sie a) für $G = Z\left(\vec{G}\right) = (V, E)$.

Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ ein Graph mit $V_1 = V$, $E_1 = \{[i,j] : [i,j] \notin E\}$.

d) Zeichnen Sie G_1 und zeigen Sie, dass G_1 bipartit ist.

e) Zeigen Sie, dass G_1 zusammenhängend ist, und ermitteln Sie ein Gerüst in G_1.

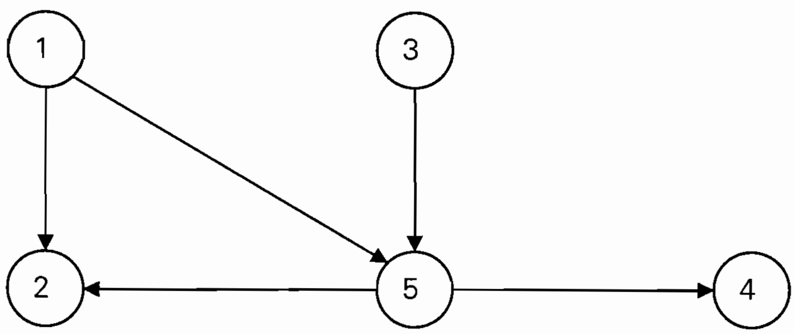
Aufgabe 5

Für mehrere Planungsprobleme ist eine topologische Sortierung des zugrunde liegenden Digraphen die Voraussetzung.

a) Was versteht man unter topologischer Sortierung?

b) Was ist eine Voraussetzung, damit ein Digraph topologisch sortiert werden kann?

c) Nehmen Sie im folgenden Digraph eine topologische Sortierung vor!



Aufgabe 6

Gegeben sei ein Digraph mit der Bewertungsmatrix:

$$C = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & \infty & 9 & \infty & 6 \\ 3 & 7 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 8 & 0 & \infty & 6 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & 4 & 5 & 0 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 & \infty \\ 7 & 8 & 7 & \infty & \infty & 4 & \infty & 0 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie in $G = Z(\vec{G})$ alle Minimalgerüste mit Hilfe des Kruskal-Algorithmus!

b) Berechnen Sie in $\vec{G}$ alle minimalen gerichteten Bäume (gerichteten Minimalgerüste) mit Wurzel $q = 3$ und wenden Sie dazu den Dijkstra-Algorithmus an!

Aufgabe 7

Gegeben sind folgende Kanten inkl. der Bewertungen $c[i,j]$:

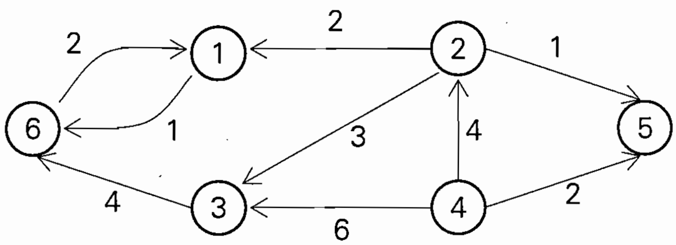
$c[i,j]$	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7
$[i,j]$	[3,4]	[4,5]	[1,6]	[3,5]	[2,3]	[4,6]	[1,3]	[1,2]	[1,4]	[5,6]

a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen.

b) Geben Sie ein Minimalgerüst unter Verwendung des Algorithmus von Prim an.

Aufgabe 8

Gegeben sei folgender Digraph:



Ermitteln Sie mithilfe des Verfahrens von Dijkstra die minimalen Entfernungen zwischen Knoten 4 und den restlichen Knoten $j = 1,\ldots,5$.

Aufgabe 9

Bei der Berechnung minimaler Wege in einem Digraphen mit Hilfe des Tripelalgorithmus ist der Computer abgestürzt. Ausgegeben wurde das Ergebnis des vorletzten Schrittes:

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Führen Sie den letzten Schritt zur Berechnung der Entfernungsmatrix D^5 und der Wegematrix W^5 durch und geben Sie den minimalen Weg von 4 nach 2 mit dessen Bewertung an!

Aufgabe 10

Ein Produzent (P) steht vor der Frage, einen Händler H direkt oder indirekt über Zwischenläger $(Z_1), (Z_2), (Z_3)$ zu beliefern. Die einzelnen Lieferkosten entnehme man der folgenden Bewertungsmatrix:

$D_0 =$

	P	Z_1	Z_2	Z_3	H
P	0	5	4	∞	10
Z_1	∞	0	∞	2	4
Z_2	∞	∞	0	2	4
Z_3	∞	∞	∞	0	1
H	∞	∞	∞	∞	0

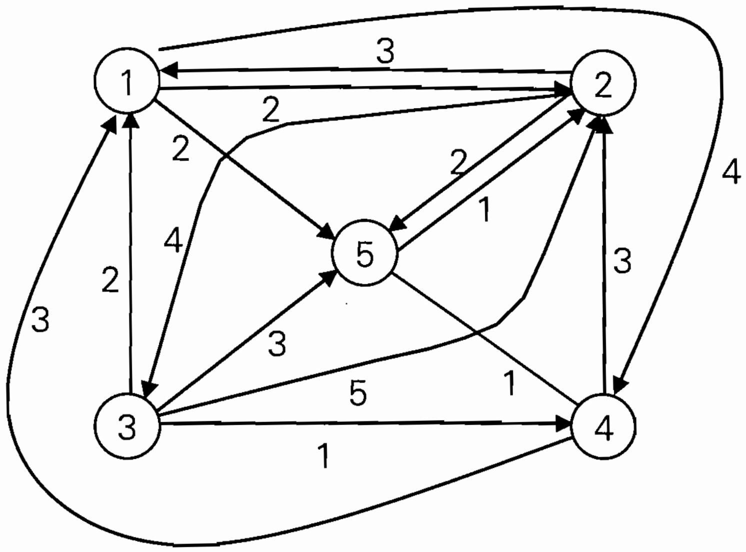
a) Man zeichne den zu D_0 gehörigen Digraphen und ermittle zu D_0 die Vorgängermatrix W_0.

b) Man berechne zu D_0 und W_0 die Entfernungsmatrix D und die Wegematrix W und interpretiere das Ergebnis.

c) Wenden Sie den Dijkstra-Algorithmus mit dem Startknoten P an.

Aufgabe 11

Gegeben sei der bewertete Digraph:



Obige Abbildung zeigt das vereinfachte Verkehrsnetz einer Kleinstadt. Die Knoten entsprechen Straßenkreuzungen, die Pfeile den in Pfeilrichtung zu durchfahrenden Einbahnstraßen und die Kanten den in beiden Richtungen durchfahrbaren Straßen. Die Pfeil- bzw. Kantenbewertungen bedeuten die Länge der betreffenden Straßenverbindungen

Eine Getränkefirma möchte nun an derjenigen Straßenkreuzung ein Auslieferungslager einrichten, von der aus die Summe der Entfernungen zu allen übrigen Kreuzungen minimal ist.

a) Bestimmen Sie den optimalen Standort des Auslieferungslagers und geben Sie zu jeder Kreuzung die entfernungsminimale Auslieferungsroute vom ermittelten Standort aus an!

b) Überprüfen Sie, ob die optimalen Auslieferungsrouten eindeutig festgelegt sind. Ermitteln Sie gegebenenfalls alle alternativen entfernungsminimalen Auslieferungsrouten!

Aufgabe 12

Für einen Digraphen sei

- die Inzidenzmatrix

$$H(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- und die Bewertungsmatrix $C(\vec{G}) = (c_{ij})_{5,5}$ gegeben:

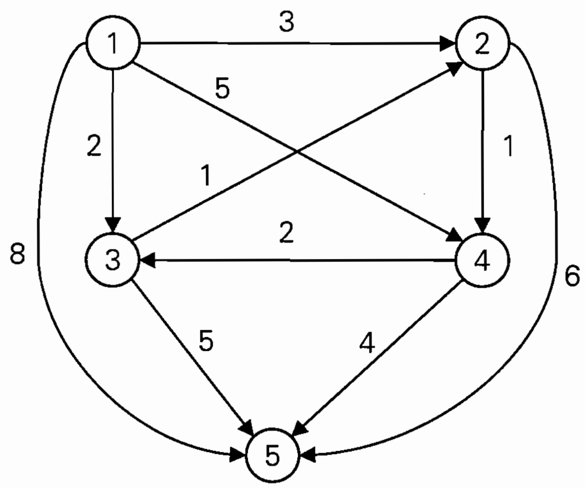
$$c_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{für } i=j \\ j-i & \text{für } i<j \text{ und } (i,j)\in\vec{E} \\ 2(j-i) & \text{für } i>j \text{ und } (i,j)\in\vec{E} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie den dazugehörigen bewerteten Digraphen.

b) Welches Problem tritt bei der Suche nach minimalen Wegen in diesem Netz auf?

Aufgabe 13

Gegeben sei folgender Digraph



Ermitteln Sie die kürzesten Wege von Knoten 1 zu den restlichen Knoten! Nutzen Sie dazu den Tripelalgorithmus. Geben Sie anschließend die Länge des minimalen Weges von Knoten 1 zu Knoten 5 sowie den dazugehörigen Weg an!

Aufgabe 14

Gegeben sei die Pfeilliste

$(1,2)\quad(1,3)\quad(1,4)\quad(2,4)\quad(2,6)\quad(3,5)\quad(4,2)\quad(4,5)\quad(5,6)$

und die Bewertungsmatrizen:

$$C_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 0 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}\quad C_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}\quad C_3=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & -2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

a) Welche Bewertungsmatrizen können zusammen mit der gegebenen Pfeilliste einen bewerteten Digraphen beschreiben bzw. für welche Bewertungsmatrizen ist dies nicht der Fall? (Begründung!)

b) Welche der Bewertungsmatrizen kann bzw. kann nicht als Ausgangsmatrix für den Tripelalgorithmus zur Bestimmung minimaler Wege benutzt werden? (Begründung!)
Setzen Sie in C_1 alle Bewertungen $c_{ij} < 0$ mit $i > j$ auf "∞" und berechnen Sie die Entfernungsmatrix für minimale Wege.

Aufgabe 15

Überprüfen Sie die Graphen G, G' mit

$$E = \{[1,3],[2,3],[3,4],[4,5],[4,6],[5,7],[6,8]\},$$
$$E' = \{[1,2],[2,3],[2,4],[4,1],[5,6],[5,7]\}.$$

auf Kreisfreiheit.

Aufgabe 16

Eine Reisegesellschaft bietet eine Omnibusreise zum Gardasee an. Von Frankfurt (F), Hamburg (HH) und München (M) sollen jeweils 2, von Köln (K) jedoch 3 Busse starten. Diese 9 Busse müssen von drei Garagen in Frankfurt (F), Karlsruhe (KA) und Stuttgart (S) abgeschickt werden, in denen jeweils 3 Wagen zur Verfügung stehen. Die Gesellschaft möchte die Busse so verteilen, dass der Gesamtweg der Busse von den Garagen zu den Startorten minimal wird. Die Entfernungen (in km), welche gefahren werden müssen, um von jeder Garage zu jedem Startort zu gelangen, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Start / Garagen	F	HH	K	M
F	0	520	180	420
KA	140	640	320	280
S	210	700	390	210

Wie sind die Busse von den Garagen aus auf die Startorte zu verteilen? Bestimmen Sie eine Lösung mit der Vogel'schen Approximationsmethode (mehrere Lösungen möglich)!

Aufgabe 17

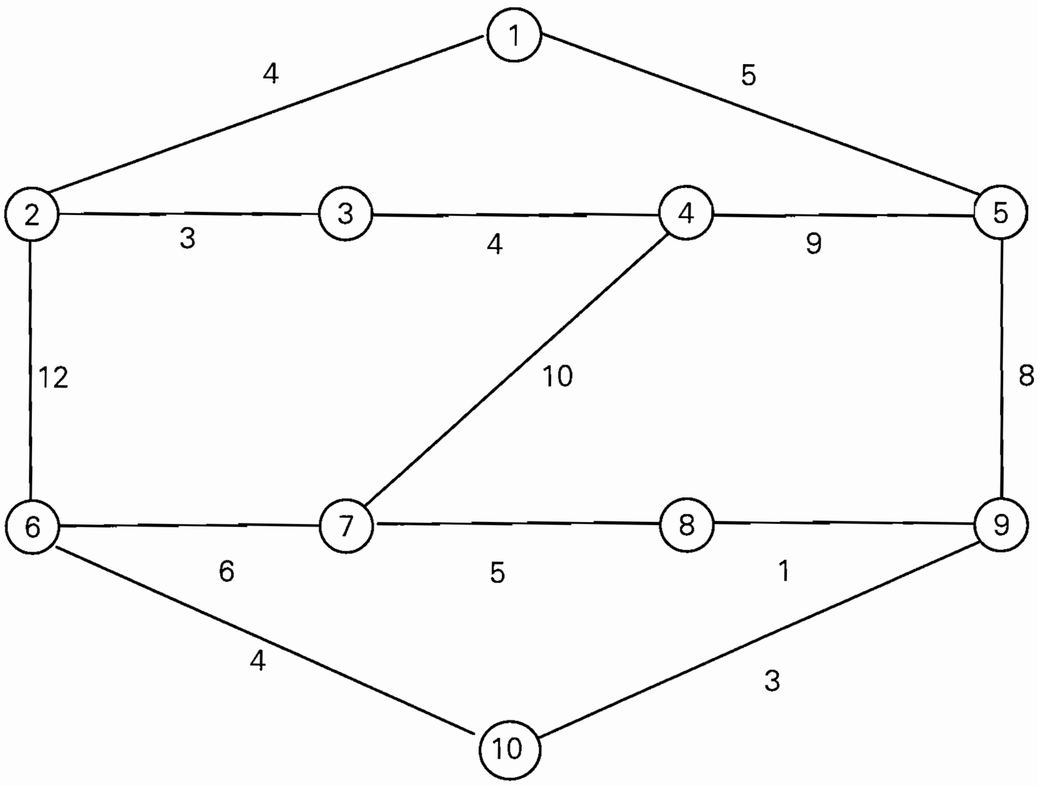
In vier Zwischenlagern soll sich nach einer Austauschaktion jeweils gleich viel eines speziellen radioaktiven Abfalls befinden. Zunächst liegen 5 Tonnen des Abfalls in Lager Nr. 1 und 3 Tonnen in Lager Nr. 2, während die beiden anderen Lager leer sind. Die Transportkosten c_{ij} pro Tonne von Lager i zu Lager j sind durch folgende Matrix gegeben:

c_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	0	1	1	4
$i=2$	1	0	1	2
$i=3$	1	1	0	1
$i=4$	4	2	1	0

Die Gesamttransportkosten sollen minimiert werden. Berechnen Sie eine Lösung mittels der Vogel'schen Approximationsmethode!

Aufgabe 18

Auf seiner Verkaufstour für Tiefkühlware muss Herr Eismann von der Firma „Frosti" jeden Tag die Haushalte einer bestimmen Region bedienen. Heute möchte er die Haushalte 1 bis 10, die in dem untenstehenden Straßennetz (die Kantenbewertungen stellen Kilometerangaben dar) angegeben sind, besuchen.



a) Bestimmen Sie in obigem Netz einen kürzesten spannenden Baum.

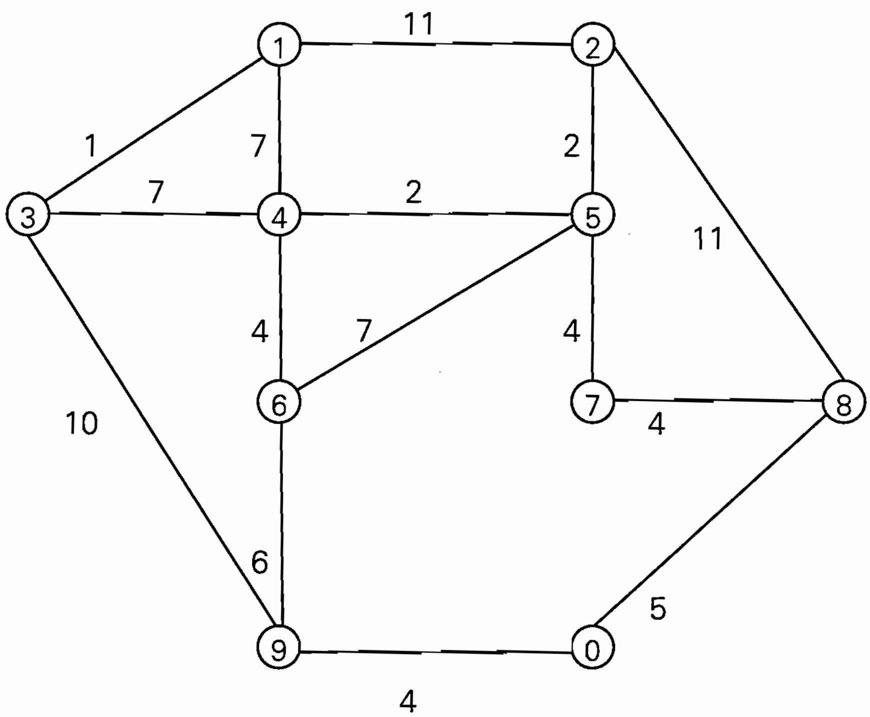
Herr Eismann möchte die Tour (kilometermäßig) möglichst kurz halten; es sollen jedoch alle zehn Kunden bedient werden.

b) Um welches Problem handelt es sich?

c) Wie lang ist die Tour höchstens?
Verwenden Sie dazu bitte das Verfahren *Bester Nachfolger* (Startknoten 1) sowie das Verfahren von *Christofides*!

Aufgabe 19

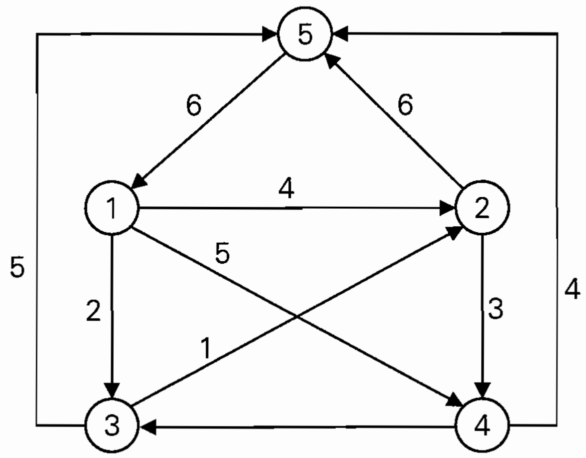
Das Stadtreinigungsamt Dresden sieht sich der Aufgabe gegenüber, ausgewählte Wege des Großen Gartens zu säubern; diese Wege sind in nachstehendem, nicht maßstabsgetreuem Graph als Kanten symbolisiert, die Kreuzungen entsprechen den Knoten.



a) Um welches Problem handelt es sich?
b) Welche Route würden Sie den Mitarbeitern empfehlen, damit die gesamte zurückgelegte Wegstrecke minimal wird?
c) Wie verändert sich die Gesamtstrecke, wenn nun zusätzlich die 6 Einheiten lange Verbindung zwischen Kreuzung 0 und 7 sowie die 3 Einheiten lange Verbindung zwischen Kreuzung 6 und 7 zu säubern ist?

Aufgabe 20

a) Geben Sie die Zielstellung der Rundreiseplanung an! Worin liegt der Unterschied zur Tourenplanung?
b) Was ist unter einer Hamilton-Tour und einer Euler-Tour zu verstehen?
c) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, um das Verfahren von Christofides im symmetrischen Anwendungsfall anzuwenden?
d) Gegeben sei folgender Digraph $\vec{G}$



Finden Sie eine Lösung für das dazugehörige Traveling Salesman Problem, indem Sie das Verfahren des besten Nachfolgers anwenden (Startknoten 1)! Geben Sie die Länge der Rundreise an!